III. *Specimen Methodi Generalis determinandi Figurarum Quadraturas. Autore* Jo. Craig.

Ad D. Georgium Cheynæum, M. D.

FAcile credas, Vir Eruditissime, mihi non parum arridere, quòd Methodus, quâ usus sum in determinandis Figurarum Quadraturis, tantopere à D. Leibnitio & te probata fuerit; ut ille alteri cuidam à se inventæ non-nihil similem agnosceret. Tu verò ut conjecturam feceris ei non multo absimilem esse illam quâ utitur D. Newtonus; eundemque ipse tanto cùm successu sequaris, ut Methodus Calculi differentialis inversa incredibili incremento jam à te promota sit in Libro tuo, quem D. Archibaldo Pitcarnio Patriæ nostræ & sœculi, hujus Ornamento inscripsisti. Sed multa (ut nôsti) ad Methodum illam inversam perficiendam necessaria adhuc invenienda supersunt. Ego Tibi rerum harum judici peritissimo rationes aliquot breviter exponam, quæ faciunt ut reliqua per Methodus hactenus usurpatas non posse obtineri putem.

Et primò quidem, cùm ex data relatione inter z & y, quæritur $\int: z\,dy$, omnes illæ Methodi postulant ut z per y & datas exprimatur; quòd tamen fieri non potest, quando æquatio relationem illam definiens ultra Cubicam vel Bi-quadraticam ascendit. Nam, non sine magno hujus scientiæ opprobrio, hæret hic adhuc Algebra Vulgaris. Secundo, quamvis regula innotesceret

generalis

generalis inveniendi Radices æquationum cujuscunque gradûs; huic tamen Methodo inversæ prorsus foret inutilis: Radix enim e surdis tam complicatis involveretur, ut nullâ arte (hactenus cognitâ) à differentiali ad Integralem regressus dari possit. Ob has rationes, Vir clarissime, alias vias & (favente Deo) conatu non prorsus irrito rem sum aggressus. Et quia in his me quædam tibi non displicitura invenisse spero, ideo eorum Specimen Tibi publicè impertiri constitui. Precor interim ut Deus Otium tibi & vitam, ut Geometriam ac Medicinam ad talem perducas perfectionem, qualem in utrâque editæ à Te Primitiæ meritò expectare faciunt.

Amicum Tibi devinctissimum,

Gillingham,
22 *Apr.* 1703.

Jo. Craig.

SECTIO I.

SIT $z^m + a y^n = b z^e y^r$ æquatio exprimens relationem inter Ordinatam z & abscissam y, in qua Exponentes m, n, e, r, denotant quoslibet Numeros, Integros vel Fractos, Affirmativos vel Negativos. Ponatur $r - n = c$ Erit

$$\text{AREA} = \frac{m}{m+n} z y +$$

$$\frac{mc + ne}{m \times \overline{m+n} \times \overline{c+1} + n \times \overline{m+n} \times \overline{e+1}} + \frac{b}{a} z^{e+1} y^{c+1}.$$

$$\frac{\overline{m-e} \times \overline{c+1+r} \times \overline{c+1}}{m \times \overline{2c+1} + n \times \overline{2c+1}} + \frac{bB}{a} z^{2c+1} y^{2c+1} +$$

$$\frac{\overline{m-e} \times \overline{2c+1+r} \times \overline{2c+1}}{m \times \overline{3c+1} + n \times \overline{3c+1}} + \frac{bC}{a} z^{3c+1} y^{3c+1} +$$

$$\frac{\overline{m-e} \times \overline{3c+1+r} \times \overline{3c+1}}{m \times \overline{4c+1} + n \times \overline{4c+1}} + \frac{bD}{a} z^{4c+1} y^{4c+1} +$$

$$\frac{\overline{m-e} \times \overline{4c+1+r} \times \overline{4c+1}}{m \times \overline{5c+1} + n \times \overline{5c+1}} + \frac{bE}{a} z^{5c+1} y^{5c+1} + \&c.$$

De hâc Seris hæc ſunt notanda: (1.) Quòd literæ majuſculæ B, C, D &c. deſignent coefficientes terminorum ipſis immediatè præcedentium: (2.) Quòd exhibeat Quadraturas omnium Figurarum Quadrabilium, quarum Curvæ per æquationem trium terminorum definiuntur: (3.) Et quòd ſemper ſint Quadrabiles, quando $\frac{m \times \overline{r-r}}{mn-rm-en}$ eſt numerus integer & affirmativus, quem vocemus l. (4.) Speciatim l+1 dat numerum Terminorum (ab initio ſumptorum) Seriei Aream quæſitam conſtituentium: (5.) Quòd ſi ponatur e = o, mutabitur hæc Series in Celebre Theorema Newtonianum

num pro Binomio communi; & proinde hoc Theorema est hujus Seriei casus specialis & simplex: (6.) Cùm sit Applicatio hujus Seriei ad Figuram particularem, hæ regulæ sunt observandæ. 1^a. Reducatur æquatio Curvam datam definiens ad formam generalem, & ex comparatione particularis cùm generali invenientur coefficientes a, b; ut & exponentes m, n, e, r. Secunda, Si exponentes sic determinati non faciant l numerum integrum & affirmativum, (juxta conditionem in Not. 3. assignatam,) tum alius terminus æquationis particularis à quantitate z liberetur; & si nunc exponentibus denuo determinatis non competat illa Quadrabilitatis conditio, tum reliquus terminus à quantitate z liberetur: Nam nullo labore quilibet ex tribus terminis æquationem datam constituentibus à quantitate z liberari potest. Tertia, Si æquationi per Regulam præcedentem tractatæ non conveniat prædicta Quadrabilitatis conditio; tum per Seriem quæratur Areæ complementum $f: y\,dz$: quo cognito statim habetur Area quæsita; nam, ut omnibus notum, $zy - f: y\,dz = f: z\,dy$. Et ut sine confusione Complementum per Seriem obtineatur; in æquatione data Curvam particularem definiente pro z scribatur Y, & pro y scribatur Z: Factâque hâc mutatione Ordinatæ in Abscissam, & Abscissæ in Ordinatam, tractetur æquatio juxta præcepta regulæ secundæ; donec illi conveniat Quadrabilitatis conditio, vel eandem ipsi non posse convenire pateat.

Exemplem 1. Sit $z^3 + y^3 = bzy$. Quia hîc $m = 3$, $n = 3$, $e = 1$, $r = 1$, $a = 1$; ideo $l = 1$, adeoque $l + 1 = 2$. Et proinde (juxta Not. 4.) duo primi Serei termini dant Aream $= \frac{1}{2} zy - \frac{1}{6} bz^2 y^{-1}$.

Exemp. 2. Sit $z^7 + a y^3 = b z y^2$, ubi $m = 7$, $n = 3$, $e = 1$, $r = 2$; qui faciunt $l = 2$; ideo (juxta Not. 4.) tres primi Seriei termini dabunt quæsitam

$$\text{AREAM} = \frac{7}{10} z y - \frac{b}{15 a} z^2 - \frac{2 b^2}{15 a^2} z^3 y^{-1}.$$

Exemp. 3. Sit $z^3 + k y^5 = h z^{-2} y^{11}$; ubi $m = r$, $n = 5$, $e = 2$, $r = 11$; at quia hi non faciunt l numerum integrum & affirmativum; ideo (per Regulam fecundam) libero terminum $h z^{-2} y^{11}$ à quantitate z; & fic æquatio fit $z^5 - h y^{11} = - k z^2 y^5$; ubi $a = - h$, $b = - k$; & $m = 5$, $n = 11$, $e = 2$, $r = e$; qui faciunt $l = 1$: Unde

$$\text{AREA} = \frac{5}{16} z y - \frac{k}{16 h} z^3 y^{-5}$$

Exemp. 4. Sit $z^2 - h y^2 = - k z^2 y^2$; ubi $m = 2$, $n = 2$, $e = 2$, $r = 2$; qui non faciunt l numerum integrum & affirmativum; ideo libero terminum $- k z^2 y^2$ à quantitate z; & tum $z^0 + k y^2 = h z^{-2} y^2$; ubi $a = k$, $b = h$; & $m = 0$, $n = 2$, $e = - 2$, $r = 2$, qui faciunt $l = 1$, ideo

$$\text{AREA} = \frac{h}{k} z^{-1} y$$

Exemp. 5. Sit $z^2 - \frac{4g^2}{h} y^6 = - \frac{g}{h} z^2 y^4$; ubi $m = 2$, $n = 6$, $e = 2$, $r = 4$; qui non faciunt l numerum integrum & affirmativum; idemque contingit liberato (à quantitate z) utrolibet ex reliquis: Ideo juxta regulam Tertiam quæro Complementum; quare (ut jam præmonui) pono $z = Y$; $y = Z$; unde æquatio data erit

$$Y^2 - \frac{4g^2}{h} Z^6 = - \frac{g}{h} Z^4 Y^2;$$

quæ (juxta Reg. 1.) reducta ad formam generalem erit hujus modi

modi $Z^6 - \frac{h}{4g^2} Y^2 = \frac{1}{4g} Z^4 Y^2$ ubi $m = 6$, $n = 2, e = 4, r = 2$; qui non faciunt l numerum integrum & affirmativum; ideo (juxta Reg. 2.) libero terminum ultimum a Z; unde $Z^2 - \frac{1}{4g} Y^2 = \frac{h}{4g^2} Z^{-4} Y^2$; ubi $m = 2$, $n = 2$, $e = -4$, $r = 2$; unde $l = 1$; & $a = -\frac{1}{4g}$, $b = \frac{h}{4g^2}$; Unde Areæ quæsitæ complementum est

$$= \tfrac{1}{2} ZY - \frac{h}{2g} Z^{-3} Y \text{ seu } \tfrac{1}{2} zy - \frac{h}{2g} zy^{-3};$$

Ergo etiam Area quæsita $\int: z\,dy = \tfrac{1}{2} zy + \frac{h}{2g} zy^{-3}$.

SECTIO II.

SIT $z^m + ay^n = bz^{2e} y^{2c+n} + fz^e y^{c+n}$ æquatio exprimens Relationem inter Ordinatam z & Abscissam y. Erit

$$\text{AREA} = Azy + Bz^{e+1} y^{c+1} + Cz^{2e+1} y^{2c+1} + Dz^{3e+1} y^{3c+1} + Ez^{4e+1} y^{4c+1} + Fz^{5e+1} y^{5c+1}, \text{ \&c.}$$

Ubi

Ubi (positis $2c+n=r$, $c+n=s$) $A=\dfrac{n}{m+n}$;

$$B=\frac{\overline{\overline{m-e}+s}\times A+\overline{e-m}}{m\times\overline{c+1}+n\times\overline{e+1}}\times\frac{f}{a}$$

$$C=\frac{\overline{\overline{m-2e}+r}\times bA+\overline{\overline{m-e}\times\overline{c+1}+r\times\overline{e+1}}\times fB+2eb-mb}{ma\times\overline{2c+1}+na\times\overline{2e+1}}$$

$$D=\frac{\overline{\overline{m-2e}\times\overline{c+1}+r\times\overline{e+1}}\times bB+\overline{\overline{m-e}\times\overline{2c+1}+s\times\overline{2e+1}}\times fC}{ma\times\overline{3c+1}+na\times\overline{3e+1}}$$

$$E=\frac{\overline{\overline{m-2e}\times\overline{2c+1}+r\times\overline{2e+1}}\times bC+\overline{\overline{m-e}\times\overline{3c+1}+s\times\overline{3e+1}}\times fD}{ma\times\overline{4c+1}+na\times\overline{4e+1}}$$

$$F=\frac{\overline{\overline{m-2e}\times\overline{3c+1}+r\times\overline{3e+1}}\times bD+\overline{\overline{m-e}\times\overline{4c+1}+s\times\overline{4e+1}}\times fF}{ma\times\overline{5c+1}+na\times\overline{5e+1}}$$

De

De hac Serie (cujus progressio primo ferè intuitu est manifesta) hæc sunt notanda. (1.) Quod figuræ (quarum Curvæ prædictâ æquatione definiuntur) sunt Quadrabiles, quando Numeri exponentiales m, n, e, c; & coefficientes a, b, f habent relationes modo assignandas; scil: quando $\frac{\overline{2c+m} \times \overline{n-2e}}{-cm-en}$ est numerus integer & affirmativus, quem vocemus l. & (cum l est major quam 2) quando Coefficientium relatio est hæc.

$$\frac{\overline{m-2e} \times \overline{lc-c+1} + r \times \overline{le-e+1}}{\overline{e-m} \times \overline{lc+1} - s \times \overline{le+1}} \times \frac{bU}{f} =$$

$$\frac{\overline{m-2e} \times \overline{lc-2c+1} + r \times \overline{le-2e+1}}{m \times \overline{lc+1} + n \times \overline{le+1}} \times \frac{bP}{a} +$$

$$\frac{\overline{m-e} \times \overline{lc-c+1} + r \times \overline{le-e+1}}{m \times \overline{lc+1} + n \times \overline{le+1}} \times \frac{fU}{a}$$

Ubi U & P denotant Coefficientes Terminorum duorum, qui immediate præcedunt ultimo Areæ quæsitæ Termino; scil: U est coefficiens termini ad Ultimum propioris, P coefficiens termini ab ultimo remotoris: ut si $Fz^{5e+1}\,y^{5c+1}$ esset ultimus Areæ quæsitæ terminus, tum U denotaret E, & P denotaret D. (2.) Ultimus

timus ille Areæ quæſitæ terminus ex valore numeri l cognoſcitur; nam hic etiam $l+1$ dat numerum terminorum (ab initio ſumptorum) Seriei, qui Aream quæſitam conſtituunt. (3) Si fuerit $l=1$, tum coefficientium relatio debet eſſe hæc

$$\frac{\overline{2e-m}\times\overline{1-A}+rA}{\overline{e-m}\times\overline{c+1}-s\times\overline{e+1}}\times\frac{b}{f}=\frac{e-m\times\overline{1-A}+sA}{m\times\overline{c+1}+n\times\overline{e+1}}\times\frac{f}{a};$$

Si $l=2$; relatio debet eſſe hæc

$$\frac{m-2e\times\overline{c+1}+r\times\overline{e+1}}{\overline{e-m}\times\overline{2c+1}-s\times\overline{2e+1}}\times\frac{bB}{f}=$$

$$\frac{\overline{2e-m}\times\overline{1-A}+rA}{m\times\overline{2c+1}+n\times\overline{2e+1}}\times\frac{b}{a}+$$

$$\frac{\overline{m-e}\times\overline{c+1}+s\times\overline{e+1}}{m\times\overline{2c+1}+n\times\overline{2e+1}}\times\frac{fB}{a}$$

SECTIO

SECTIO III.

SIT $z^m = ay^n + bz^e y^{c+n} + fz^{2e} y^{2c+n} + gz^{3e} y^{3c+n} + hz^{4e} y^{4c+n} +$ &c. æquatio exprimens relationem inter ordinatam z & abſciſſam y; & conſtans terminis quotcunq; Erit.

$$\text{Area} = Azy + Bz^{e+1} y^{c+1} + Cz^{2e+1} y^{2c+1} + Dz^{3e+1} y^{3c+1} + Ez^{4e+1} y^{4c+1} + \text{\&c.}$$

Quod in fallor, eſt Theorema non contemnendum. Calculo per-facili inveniuntur A, B, C, D, E, &c. ut & Quadrabilitatis conditiones, & quot termini ſeriei Aream quæſitam conſtituant. Creſcit quidem numerus harum conditionum pro multitudine terminorum, ex quibus conſtat æquatio relationem inter z & y definiens. Et ſpeciatim ſi illa terminorum multitudo vocetur N; tum N—2 eſt numerus conditionum Quadrabilitatis; quarum una Exponentium m, n, e, c relationem reſpicit, eſtq; hæc; ut

$$\frac{Nc - 2c + 2e - Ne + m + n}{-cm + en},$$

eſt

est numerus (quem vocemus l) Integer & affirmativus. Reliquæ vero conditiones coefficientium a, b, f, g, h, &c. respiciunt. Ac deniq; $l+1$ dat numerum terminorum (ab initio sumptorum) seriei, qui Aream quæsitam constituunt.

Corol. Ex hac Serie generali deduci potest Series, quæ exhibeat Quadraturas Figurarum, quarum Curvæ definiuntur per æquationem constantem terminis quibusvis, qui æquationem Sectionis tertiæ generalem constituunt. Nam ad hanc obtinendam opus tantum est Seriem computare pro æquatione constante tot terminis (ab initio sumptis) æquationis generalis, quot includent Terminos æquatio Curvas definiens. Tum ex valoribus quantitatum A, B, C, D, &c. Eliminentur illæ coefficientes b, f, g, &c. quæ ad æquationem propositam non spectant; reliquæ dabunt aream quæsitam Exemplo res datebit.

SECTIO IV.

SIT $z^m = ay^n + bz^e y^{c+n} + gz^{3e} y^{3c+n}$

Equationem exprimens relationem inter Z & Y. Jam quia

$$z^m = ay^n + bz^e y^{c+n} + fz^{2e} y^{2c+n} + gz^{3e} y^{3c+n}$$

est illa pars pars æquationis quæ (sumptis terminis in ordine a principio) includit æquationem datam; quam deinceps (brevitatis causa) æquationem completam vocabo; ideo Figurarum (quarum Curvæ definiuntur per æquationem completam.)

Areæ

$$\text{Areæ} = Azy + Bz^{e+1}y^{c+1} + Cz^{2e+1}y^{2c+1} + Dz^{3e+1}y^{3c+1} + Ez^{4e+1}y^{4c+1} + Fz^{5e+1}y^{5c+1} + \&c.$$

& a, b, f, g ingrediuntur valores quantitatum B, C, D, E, F *&c.* Si ergo in his valoribus ponatur ubiq; f=o (quia $fz^{2e}y^{2c+n}$ æquationem datam non ingreditur) habebis valores quantitatum A, B, C, D, E, *&c.* qui in Serie substituti dabunt Areas quæsitas. Et Calculo inito inveni.

$$A = \frac{m}{m+n}. \qquad B = \frac{\overline{\overline{e-m-c-n}\times A+\overline{m-e}}}{m\times\overline{c+1}+n\times\overline{e+1}}\times\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{\overline{c+n}\times\overline{e+1}+\overline{m-e}\times\overline{c+1}}{m\times\overline{2c+1}+n\times\overline{2e+1}}\times\frac{bB}{a}$$

$$D = \frac{\overline{\overline{m-3e}\times\overline{1-A}+\overline{3c+n}\times-A}\times g}{ma\times\overline{3c+1}}$$

$$\frac{+\overline{\overline{m-e}\times\overline{2c+1}+\overline{c+n}\times\overline{2e+1}}\times -bC}{+na\times\overline{3c+1}}$$

B b b b b b b b

E=

$$E=\frac{\overline{\overline{m-3e}\times\overline{c+1}+\overline{3c+n}\times\overline{e+1}}\times}{ma\times\overline{4c+1}}$$

$$\frac{\overline{-gB+\overline{m-e}\times\overline{3c+1}+\overline{c+n}\times\overline{3e+1}}\times-bD}{+na\times\overline{4e+1}}$$

$$F=\frac{\overline{\overline{m-3e}\times\overline{2c+1}+\overline{3c+n}\times\overline{2e+1}}\times}{+ma\times\overline{5c+1}}$$

$$\frac{\overline{-gC+\overline{m-e}\times\overline{4c+1}+\overline{c+n}\times\overline{4e+1}}\times-bE}{+na\times\overline{5e+1}}$$

$$G=\frac{\overline{\overline{m-3e}\times\overline{3c+1\,3}+\overline{c+n}\times\overline{3e+1}}\times}{+ma\times\overline{6c+1}}$$

$$\frac{\overline{-gD+\overline{m-e}\times\overline{5c+1}+\overline{c+n}\times\overline{5e+1}}\times-bF}{+na\times\overline{6e+1}}$$

Ex his patet progressio reliquorum in infinitum. Et sic habetur Series exhibens Quadraturas omnium Figurarum, quarum Curvæ definiuntur per hanc æquationem quatuor terminorum $z^m = ay^n + bz^e y^{c+n} + gz^{3e} y^{3c+n}$.

Et notandum quod conditiones Quadrabilitatis & numerus terminorum Seriei, Aream quamlibet quæ sitam constituentium, eadem sunt cum conditionibus Quadrabilitatis, & numero Terminorum, quæ conveniunt Figuris, quarum Curvæ per æquationes completas definiuntur.

Corol. Præter has duas series in § 2 & 4 propter Figuras quatuor terminorum, possunt eodem modo infinitæ aliæ series computari pro cæteris casibus Figurarum, quatuor terminorum. Quod etiam intelligendum est De omnibus aliis Figuris, quarum Curvæ per æquationes quotlibet terminorum numero constantes definiuntur.

Non jam vacat ipsam Methodum minutiatim describere, per quam ad hujusmodi Series pervenio; brevem tamen ejus rationem exponere forte non ingratum erit. Assumo Seriem ex z pariter ac y compositam, sc:

$Azy + Bz^p y^q + Cz^s y^h + Dz^l y^k +$ &c. $= ſ: zdy$. Cujus singuli termini (præter primum) habeant Exponentes incognitos. Tum æquationem instituo inter duos valores quantitatis dz, quorum alter ex hac serie, alter ex æquatione relationem inter z & y definiente per Methodum Calculi Differentialis directam facile invenitur. Ex terminis hujus æquationis ritè reductæ primo deter-

mino

mino exponentes incognitos p, q, g, h, l, k &c. Et de in coefficientes A, B, C, &c. Et si plures sint comparationes, quam quæ determinandis his coefficientibus sufficiunt, tum ex reliquis deduco Quadrabilitatis conditiones. Si recta ineatur via, Calculus est longe facillimus; multasq; habeo Regulas huc spectantes quas alias forsan tradam; ut & usum hujus Methodi in inveniendis Quadraturis irrationalibus finitis, quando rationales non dantur: res enim omnino in potestate est.

IV. An
